

# 傾斜機能材料中の定常熱伝導問題への DRBEM の適用 (3次元問題での検討)

## A Dual Reciprocity Boundary Element Method Applied to the Steady-State Heat Conduction Problem in Functionally Gradient Materials (Study on Three-dimensional Problems)

田中 正隆<sup>1)</sup>, 松本 敏郎<sup>2)</sup>, 須田 裕輔<sup>3)</sup>

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Yusuke SUDA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: yusuke@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper presents the dual reciprocity boundary element method (DRBEM) for solving the steady-state heat conduction problems of functionally gradient materials. The functionally gradient material is modeled as an inhomogeneous one where the heat conduction coefficient is a continuous function of coordinates. The integral equation formulation uses the fundamental solution of Laplace equation for a homogeneous material, and hence a domain integral arises in the boundary integral equation. This domain integral is transformed into a boundary integral by using a new set of radial basis functions. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for three-dimensional problems. Numerical computation is carried out for several examples, the exact solutions of which are available in the literature. Through comparison of the results obtained by the computer code with the exact ones, the potential usefulness of the proposed DRBEM is demonstrated.

**Key Words:** Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Functionally Gradient Material, Steady-state Heat Conduction

### 1. 緒言

傾斜機能材料に代表される非均質材料は熱伝導率が場所ごとに連続的に変化する特性を持つ非均質媒体としてモデル化することができる<sup>(1)(2)</sup>.

境界要素法は、均質な媒体からなる場の問題に対しては有効な解析手法であるが、媒体の特性値が場所ごとに変化するような非均質媒体に対しては基本解が求められる場合は限られており、均質媒体の基本解を用いて定式化を行わなければならない。このため、境界積分方程式に非均質性に由来する領域積分項が現れる<sup>(3)</sup>。この領域積分は領域内部を要素またはセルに区切ることにより計算することができるが、3次元問題を扱う場合、領域内部を3次元要素またはセルに区切る必要があり、この作業には手間がかかる。

そこで、本研究では非均質性に由来する項に対して二重相反法 (DRM) を適用し、領域積分項の境界積分への変換を行

う<sup>(4)~(8)</sup>。DRMを用いることにより、比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて非均質性に由来する領域積分項を境界積分に変換することができる。この手法に基づき定式化を行うことにより非均質性に由来する領域積分項を境界積分に置き換え、最終的に境界のみの離散化と領域内部に評価点を置くことにより効率的な解析が可能となる。著者ら<sup>(9)</sup>は2次元問題に対して本手法の有効性を確認しているが、3次元問題に対しても DRM が有効な手法であることを本報にて示す。非均質媒体に対する3次元定常熱伝導問題の定式化の詳細を示すとともに、数値解析例を示し、本手法の3次元問題に対する有効性を示す。

### 2. 理論

#### 2.1. 支配微分方程式

Fig. 1 に示されるような、場所ごとに熱伝導率  $\lambda(x)$  が連続的に変化する3次元定常熱伝導問題に対する支配微分方程式

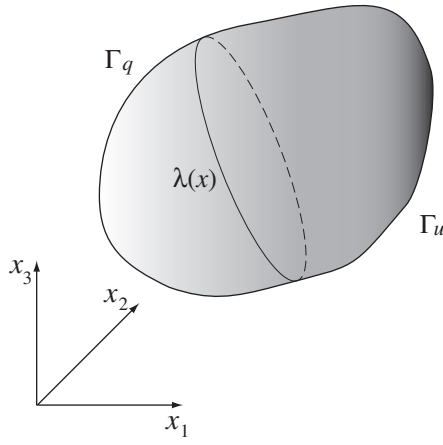


Fig.1 Heat conduction problem

は、内部発熱がないとき次式で表される<sup>(10)</sup>。

$$\nabla\{\lambda(x)\nabla u(x)\} = 0 \quad (1)$$

境界条件は次式のように与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} &= \bar{q}, & x \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\nabla^2$  はラプラシアン、 $u(x)$  は温度、 $n$  は境界上の単位外向き法線ベクトル、 $\partial u(x)/\partial n$  は温度の法線方向勾配を表す。また、 $\bar{u}$ 、 $\bar{q}$  はそれぞれ与えられた既知の境界値である。式(1)は次式のように展開することができる。

$$\nabla^2 u(x) = -\frac{1}{\lambda(x)}\{\nabla\lambda(x)\nabla u(x)\} \quad (3)$$

上式において右辺は非均質性に由来する項であり、この展開された式より定式化を行う。

## 2.2. 積分方程式

本研究の定式化では近似基本解として Laplace 方程式の基本解を用いる。非均質性を考慮した基本解は一般に求めることが困難であるため、Laplace 方程式の基本解を用いて定式化を行う。Laplace 方程式の基本解  $u^*(x, y)$  は次の微分方程式を満足する<sup>(3)</sup>。

$$\nabla^2 u^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad (4)$$

ただし、 $\delta(x - y)$  は3次元における Dirac のデルタ関数である。上式より、3次元問題に対する Laplace 方程式の基本解は次式となる。

$$u^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \quad (5)$$

上式において  $x, y$  はそれぞれ空間内の点であり、 $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離を表す。基本解  $u^*(x, y)$  を式(3)の両辺にかけ、考察領域全体で積分し、部分積分を行うことにより次式を得る。

$$\begin{aligned} c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x)d\Gamma \\ = \int_{\Omega} -\frac{1}{\lambda(x)}\{\nabla\lambda(x)\nabla u(x)\}u^*(x, y)d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $q^*(x, y)$  は基本解  $u^*(x, y)$  の法線方向勾配を表し、次式となる。

$$q^*(x, y) = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (7)$$

式(6)より、非均質性に由来する領域積分が現れることがわかる。この領域積分を境界積分に変換するために、DRM を適用する。

## 2.3. DRM の適用

式(6)の右辺に現れる領域積分を境界積分に変換するために、本研究では非均質性に由来する項に対して DRM を適用する<sup>(4)-(8)</sup>。そこで、式(3)の右辺を次式で近似する。

$$-\frac{1}{\lambda(x)}\{\nabla\lambda(x)\nabla u(x)\} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(x, z^j) \quad (8)$$

ただし、 $N$  は境界節点数、 $L$  は内部選点数、 $\alpha_j$  は未知係数、 $f(x, z^j)$  は近似関数、 $z^j$  は DRM 選点を表す。ここで、近似関数  $f(x, z^j)$  は観測点  $x$  と DRM 選点  $z^j$  との距離の関数である。式(8)の近似を用いると式(3)は次式のように表すことができる。

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(x, z^j) \quad (9)$$

ここで、次式を満たす特解を  $\hat{u}(x, z^j)$  とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^j) = f(x, z^j) \quad (10)$$

上式より、式(9)の右辺は次式のように未知係数  $\alpha_j$  と特解  $\hat{u}(x, z^j)$  を用いて書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \{\nabla^2 \hat{u}(x, z^j)\} \quad (11)$$

上式の両辺に基本解をかけ、考察領域全体で積分することにより次の積分方程式を得る。

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(x)u^*(x, y)d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} \nabla^2 \hat{u}(x, z^j)u^*(x, y)d\Omega \quad (12)$$

上式を部分積分することにより、式(6)はすべて境界積分で表され次式となる。

$$\begin{aligned} c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x)d\Gamma \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c(y)\hat{u}(x, z^j) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^j)d\Gamma \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^j)d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\hat{q}(x, z^j)$  は特解  $\hat{u}(x, z^j)$  の法線方向勾配を意味する。式(13)より、DRM を用いることにより領域積分が境界積分に変換されていることが確認できる。

また、本研究では近似関数として次式を用いる。

$$f(x, z^j) = \begin{cases} (1 - r^j)^4(4r^j + 1), & r^j \leq 1 \\ 0, & r^j \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

上式は、Compactly Supported Radial Basis Function<sup>(5)</sup> と呼ばれる近似関数であり、式中の  $r^j$  は 3 次元空間内における観測点  $x$  と DRM 選点  $z^j$  との距離である。基本解の中で使われる  $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離であり、近似関数  $f(x, z^j)$  の中で使われている  $r^j$  とは意味が違うことに注意されたい。DRM や MRM で用いる近似関数については多くの研究がなされており、上記の Compactly Supported Radial Basis Function や Thin Plate Spline, 線形な Radial Basis Function<sup>(6)</sup> などの距離の関数がいられる場合に他に温度の関数<sup>(7)</sup> が用いられることもある。本研究の定式化では、 $r^j = 0$  において近似関数の空間微分が連続である必要がある。これは未知係数を求める際、温度  $u(x)$  の空間微分を近似関数を用いて評価するためである。上式を用いることにより、近似関数  $f(x, z^j)$  の空間微分が  $r^j = 0$  において連続であることは容易に確認できる。本論文では、式 (14) の  $r^j \leq 1$  の場合のみ考慮した関数を近似関数として使用する。このとき、特解  $\hat{u}(x, z^j)$  は次式となる<sup>(11)</sup>。

$$\hat{u}(x, z^j) = \frac{1}{6}(r^j)^2 - \frac{1}{2}(r^j)^4 - \frac{2}{3}(r^j)^5 + \frac{5}{14}(r^j)^6 + \frac{1}{14}(r^j)^7 \quad (15)$$

また、特解  $\hat{u}(x, z^j)$  の法線方向勾配も距離の関数として次式のように表される。

$$\hat{q}(x, z^j) = \left\{ r_x \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_y \frac{\partial x_2}{\partial n} + r_z \frac{\partial x_3}{\partial n} \right\} \left\{ \frac{1}{3} - 2(r^j)^2 - \frac{10}{3}(r^j)^3 + \frac{15}{7}(r^j)^4 + \frac{1}{2}(r^j)^5 \right\} \quad (16)$$

ただし、 $r_x, r_y, r_z$  はそれぞれ  $r^j$  の  $x_1, x_2, x_3$  方向成分を表す。

ソース点  $y$  を境界上のすべての節点および内部のすべての選点にとることにより次式のように離散化された形で書き表すことができる。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} = [\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}]\boldsymbol{\alpha} \quad (17)$$

ただし、

$$H_{ij} = c(y^i)\delta_{ij} + \int_{\Gamma} q^*(x, y^i)\phi J d\Gamma \quad (18)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma} u^*(x, y^i)\phi J d\Gamma \quad (19)$$

$$\hat{U}_{ij} = \hat{u}(x^i, z^j) \quad (20)$$

$$\hat{Q}_{ij} = \hat{q}(x^i, z^j) \quad (21)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ、 $\phi$  は内挿関数、 $J$  はヤコビアンである。さらに、未知係数  $\alpha_j$  については近似関数  $f(x, z^j)$  と非均質性に由来する項により、次に示す方法で評価する。

#### 2.4. 未知係数の評価

定式化の際、非均質性に由来する項を近似関数  $f(x, z^j)$  と未知係数  $\alpha_j$  を用いて近似しており、この関係から未知係数を評価する方法を以下に示す。

式 (8) より、非均質性に由来する項を展開して示すと次式となる。

$$\sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(x, z^j) = -\frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_3} \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \right\} \quad (22)$$

ここで、近似関数  $f(x, z^j)$  は既知関数であるため未知係数  $\alpha_j$  はマトリクス形式で次式のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \{ \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{x_1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_{x_2} + \mathbf{K}_3 \mathbf{u}_{x_3} \} \quad (23)$$

ただし、 $\mathbf{F}^{-1}$  は近似関数のマトリクス  $\mathbf{F}$  の逆行列を表す。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \cdots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \cdots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

また、 $\mathbf{K}_m$  は熱伝導率に関する係数を表す。ただし、 $m = 1, 2, 3$  である。

$$\mathbf{K}_m = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\lambda(x^1)} \frac{\partial \lambda(x^1)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\lambda(x^{N+L})} \frac{\partial \lambda(x^{N+L})}{\partial x_m} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

また、 $\mathbf{u}_{x_m}$  は温度  $u(x)$  の空間微分を表す。

$$\mathbf{u}_{x_m} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x^1)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L})}{\partial x_m} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

さらに、温度  $u(x)$  の空間微分を近似関数  $f(x, z^j)$  を用いて評価する。温度  $u(x)$  の空間微分を評価する手法としては、差分近似を用いる手法、各節点における状態量を内挿して数値微分する手法などがあるが、本研究では一貫して近似関数  $f(x, z^j)$  を用いて評価する。まず、温度  $u(x)$  を次式のように近似する。

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j f(x, z^j) \quad (27)$$

ここで、 $\beta_j$  は未知係数を表す。上式を  $x_m$  で微分することにより次式を得る。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_m} = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \frac{\partial f(x, z^j)}{\partial x_m} \quad (28)$$

式 (27)、(28) を全選点に対して適用し未知係数  $\beta_j$  を消去することにより近似関数  $f(x, z^j)$  の空間微分を次式のように評価することができる。

$$\mathbf{u}_{x_m} = \mathbf{F}_{x_m} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (29)$$

ただし、上式において  $\mathbf{F}_{x_m}$  の成分は近似関数  $f(x, z^j)$  の空間微分であり、次式のような  $r^j$  の関数となる。

$$\frac{\partial f(x, z^j)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(x, z^j)}{\partial r^j} \frac{\partial r^j}{\partial x_m} \quad (30)$$

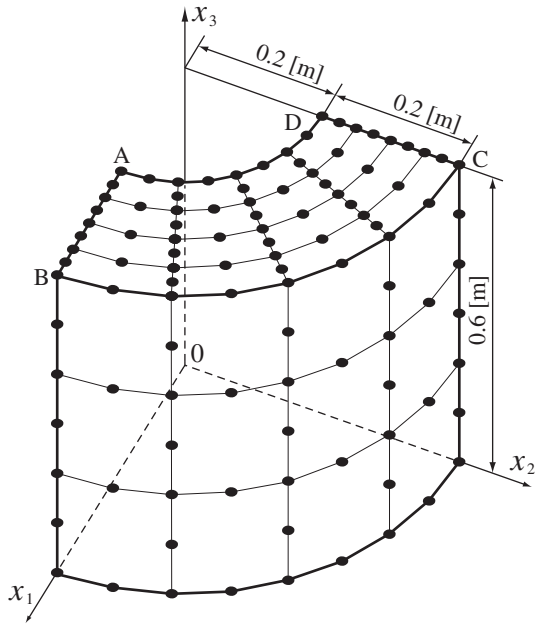


Fig. 2 Analysis model

式 (14) のような関数を近似関数として使用することにより上式は  $r^j = 0$  において連続となる．この手法を用いることにより，未知係数  $\alpha_j$  は次式となる．

$$\alpha = [K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2} + K_3 F_{x_3}] F^{-1} u \quad (31)$$

上式を式 (17) へ代入し，マトリックス形式で表すと次式となる．

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}]Ru \quad (32)$$

ただし， $R$  は次式を表す．

$$R = [K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2} + K_3 F_{x_3}] F^{-1} \quad (33)$$

したがって，最終的に次式のようにまとめることができる．

$$[H - S]u - Gq = 0 \quad (34)$$

ただし，

$$S = [H\hat{U} - G\hat{Q}]R \quad (35)$$

である．式 (34) より  $N$  個の境界上の未知量と  $L$  個の内部未知温度を求めることができる．

### 3. 数値解析例と考察

#### 3.1. 例題 (1)

本手法の有効性を示すために，次に示す 3 次元モデルの例題解析を行う． Fig. 2 のような円筒モデルについて考える．円筒内部の半径 0.2[m]，円筒外部の半径 0.4[m]，高さ 0.6[m] とし，解析モデルの対称性から図示のように円筒の 1/4 部分を取り出して解析する．境界上の節点数 242，内部選点数 245 をとり内部選点は境界節点に合わせて領域内部に均等に配置する．また，境界を四角形 2 次要素を用いて 80 要素に

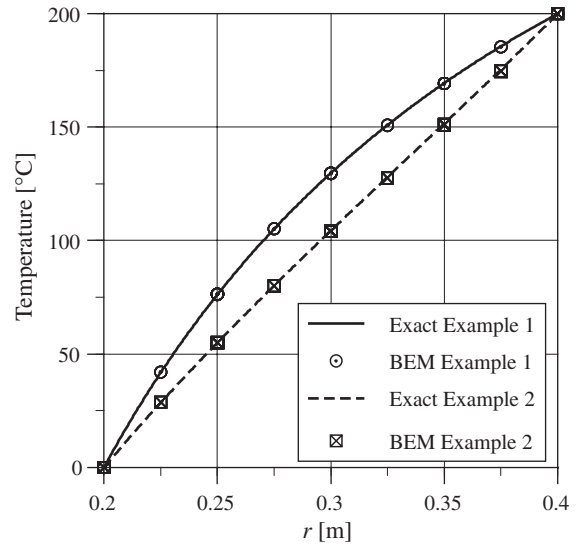


Fig. 3 Result of potential

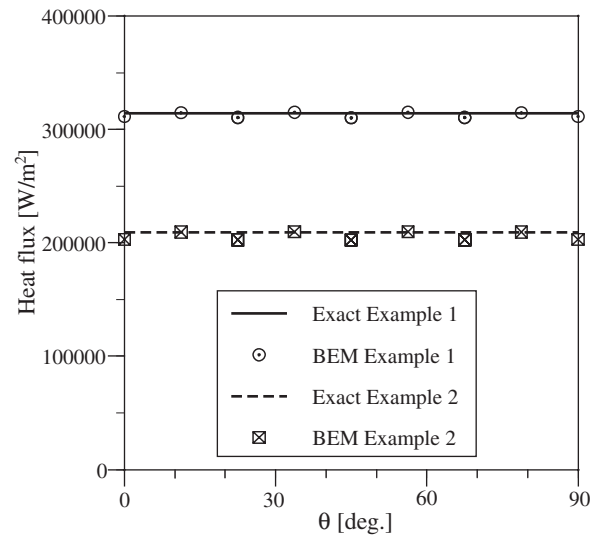


Fig. 4 Heat flux along AD

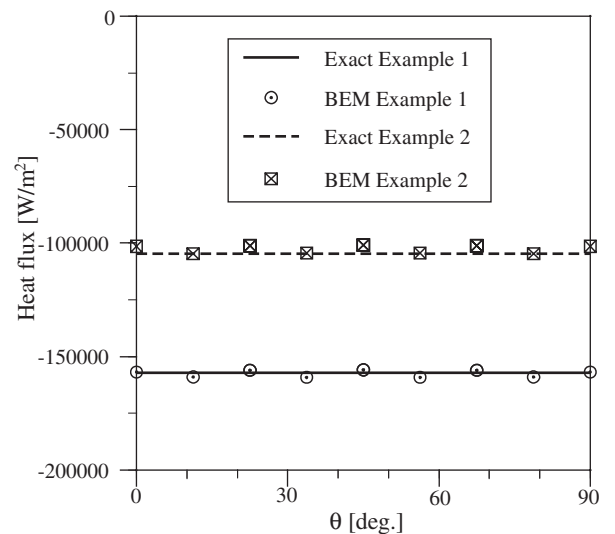


Fig. 5 Heat flux along BC

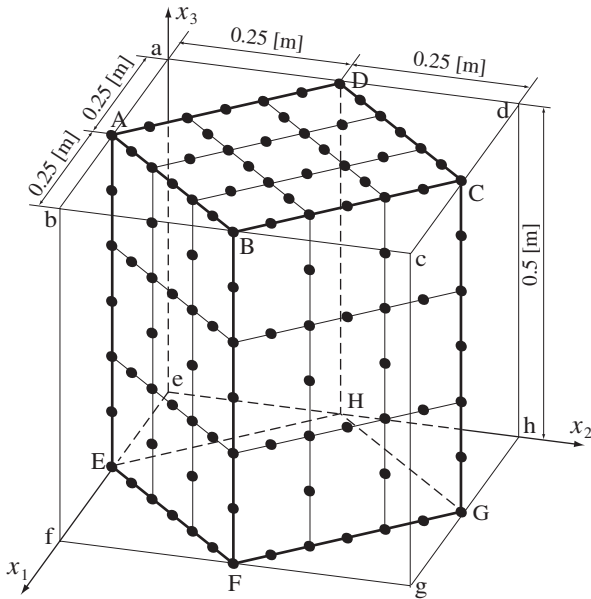


Fig. 6 Analysis model

分割する．境界条件は円筒内面において温度  $0[^\circ\text{C}]$ ，円筒の外表面において温度  $200[^\circ\text{C}]$  とし，それ以外の面においては全て断熱境界条件 ( $q = 0$ ) を仮定する．また，このモデルにおいて熱伝導率は半径方向にのみ変化するものとし，その変化が次式で与えられるような 2 つの例題について解析を行う．

$$\lambda(r) = A + Br + Cr^2 \quad (36)$$

Example 1 では線形変化を仮定し  $A = 50, B = 600, C = 0$  と置く．また，Example 2 では 2 次関数的な変化を仮定し  $A = 200, B = 0, C = -600$  と置く．

上の例題の厳密解は次式を解くことにより求めることができる．すなわち，

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\lambda(r)} \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (37)$$

である．上式を解くことにより厳密解は次式で与えられる．

$$u(r) = C_1 + C_2 \int \frac{1}{r\lambda(r)} dr \quad (38)$$

ただし， $C_1, C_2$  は境界条件より求められる積分定数である．

Fig. 3 はそれぞれの例題での AB 軸上の温度の解析結果を厳密解と比較して示す．熱伝導率の変化によらず精度のよい解析結果が得られていることが分かる．Figs. 4, 5 は熱流束の解析結果と厳密解を比較して示す．Fig. 2 の要素分割よりも細かく要素分割を行うことにより熱流束の精度も向上することを確認している．

### 3.2. 例題 (2)

Fig. 6 に示す直方体モデルを用いて例題解析を行う．このモデルにおいて解析対象は ABCDEFGH からなる直方体である．境界上の節点数は 164，内部選点数 100 をとり，境界を 54 の四角形 2 次要素を用いて図示のように要素分割を行う．また，内部選点は領域内部に均等に配置する．境界条件は，

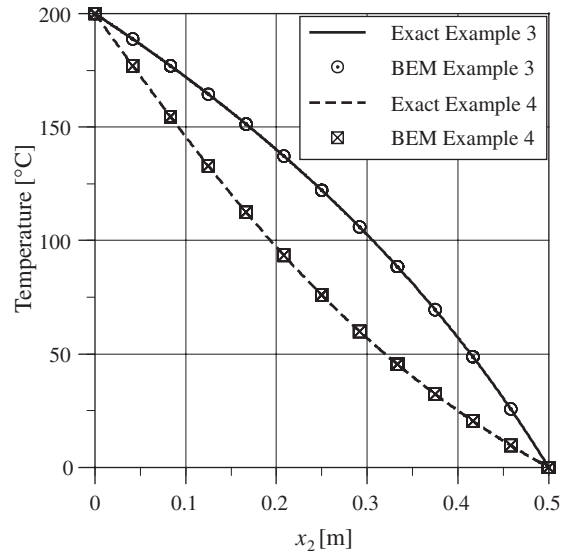


Fig. 7 Result of potential

面 ABFE, CDHG において温度既知，その他の面に対しては熱流束既知の境界条件を与える．それぞれの境界条件は直方体 abcdefgh を面 abfe において  $200[^\circ\text{C}]$ ，面 cdhg において  $0[^\circ\text{C}]$ ，その他の面に対して断熱境界条件を与えたときの厳密解を使用する．また，このとき熱伝導率は  $x_2$  方向にのみ変化するものとし，次式で表される 2 つの例題に対しての結果を以下に示す．

$$\lambda(x_2) = A + Bx_2 + Cx_2^2 \quad (39)$$

ここで，Example 3 では線形変化を仮定し， $A = 200, B = -240, C = 0$  と置く．また，Example 4 では 2 次関数的な変化を仮定し， $A = 60, B = 0, C = 360$  と置いた．Fig. 7 は AD および BC 上の温度変化について，本解析結果を厳密解と比較したものである．精度のよい結果が得られていることが分かる．また，内部選点および他の境界節点においても同様の結果が得られていることを確認している．以上より，この DRM を用いた解析は複雑な問題に対しても精度のよい結果を得ることができる手法であると言える．熱伝導率の場所的变化がさらに大きいときは，境界節点及び内部選点をより細かく取れば精度のよい解を求めることができる．

### 4. 結言

本研究では，傾斜機能材料中の 3 次元定常熱伝導問題に対する二重相反境界要素法 (DRBEM) について検討した．開発した解析プログラムにより 3 次元問題の例題解析を行い，本手法による解析結果の精度について検討した．本手法では，温度の空間微分を近似関数を用いて評価している．この温度の微分が内部選点の節点配置に影響されるため，領域内部の選点は境界節点に合わせて均等に取り必要がある．この DRBEM により，3 次元問題に対して境界要素法が有効利用できる範囲を広げることができたと言えよう．

## 参考文献

- (1) 上田整：マイクロメカニカルモデルによる傾斜機能材料の熱衝撃応答解析，機論 (A)，**66**-648 (1991)，pp. 607–613.
- (2) 板垣正文，西山修輔，富岡智，榎戸武揚：不均一性に対するヘルムホルツ型方程式の境界要素解析，BTEC 論文集，**8** (1998)，pp. 1–6.
- (3) 田中正隆，松本敏郎，中村正行：境界要素法，(1991)，培風館。
- (4) P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel : The Dual Reciprocity Boundary Element Method, (1992), *Computational Mechanics Publications*.
- (5) C. S. Chen, C. A. Brebbia, and H. Power : Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.* **15** (1999) pp. 225–242 .
- (6) P. W. Partridge : Towards Criteria for Selecting Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* , **24** (2000), pp. 519–529 .
- (7) P. A. Ramachandran, K. Balakrishnan : Radial Basis Functions as Approximate Particular Solutions : Review of Recent Progress, *Engineering Analysis with Boundary Elements* , **24** (2000), pp. 575–582.
- (8) J. C. Jo, W. K. Shin, and C. Y. Choi : Multidimensional Phase Change Problems by the Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **36** (1999), pp. 95–113.
- (9) 田中正隆，松本敏郎，須田裕輔：傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対する DRM 境界要素法，境界要素法論文集，**17** (2000) pp. 11–16 .
- (10) Shi-Jun Liao, A. T. Chwang : General Boundary Element Method for Unsteady Nonlinear Heat Transfer Problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **35** (1999), pp. 225–242 .
- (11) M. A. Golberg, C. S. Chen, and M. Ganesh : Particular Solutions of 3D Helmholtz-type Equations Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements* , **24** (2000) pp. 539–547 .